Доказательство формул ***Синус и косинус суммы и разности аргументов.***

Готовясь к уроку по теме « ***Синус и косинус суммы и разности аргументов*** » по Мордковичу, встретил в учебнике предложение «доказательство технически довольно сложно, и мы его здесь не приводим.»

Меня эта теорема заинтересовала и решил найти более простое доказательство. ***<u>Вот что получилось.</u>*** Начал с доказательства формулы $\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y.$

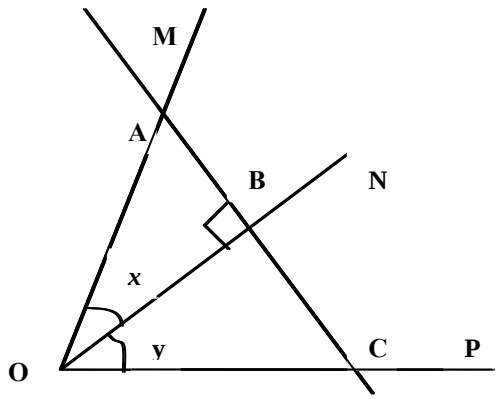

Рис. 1

Пусть $\angle MON = x,\ \angle NOP = y.$ Через произвольную точку A луча AM проведем прямую $AB \perp ON.$ Пусть $AB \cap OP = C.$

Имеем: $S_{\triangle AOC} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC}.$

$$OA\cdot OC\cdot\sin(x+y) = OA\cdot OB\cdot\sin x + OB\cdot OC\cdot\sin y.$$

$$\sin(x+y) = \frac{OA\cdot OB}{OA\cdot OC}\cdot\sin x + \frac{OB\cdot OC}{OA\cdot OC}\cdot\sin y.$$

$$\sin(x+y) = \frac{OB}{OC}\cdot\sin x + \frac{OB}{OA}\cdot\sin y.$$

В $\triangle OBC$ $\angle B = 90^{\circ}$ и $\frac{OB}{OC} = \cos y.$ В $\triangle OAB$ $\angle B = 90^{\circ}$ и $\frac{OB}{OA} = \cos x.$ Имеем:

$$\sin(x+y) = \sin x\cdot\cos y + \cos x\cdot\sin y.$$

$$\sin(x-y) = \sin(x+(-y)) = \sin x\cdot\cos(-y) + \cos x\cdot\sin(-y) = \sin x\cdot\cos y - \cos x\cdot\sin y.$$

$$\cos(x+y) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-(x+y)\right) = \sin\left(\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-y\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\cos y - \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\sin y.$$

Т.е. $\cos(x+y) = \cos x\cdot\cos y - \sin x\cdot\sin y.$

$$\cos(x-y) = \cos(x+(-y)) = \cos x\cdot\cos(-y) - \sin x\cdot\sin(-y) = \cos x\cdot\cos y + \sin x\cdot\sin y.$$

Если один из углов $\boldsymbol{x}$ или $\boldsymbol{y}$ равен 90°, то $\sin(x+90^{\circ}) = \sin x\cdot\cos 90^{\circ} + \cos x\cdot\sin 90^{\circ} =$ $= \sin x\cdot 0 + \cos x\cdot 1 = \cos x.$ Подтверждение формулы приведения.

Если один из углов $\boldsymbol{x}$ или $\boldsymbol{y}$ тупой (пусть $\boldsymbol{x}$ - тупой), то $x = 90^{\circ} + x'.$ Имеем:

$$\sin(x+y) = \sin(x'+90^{\circ}+y) = \sin(90^{\circ}+(x'+y)) = \cos(x'+y) = \cos x'\cdot\cos y - \sin x'\cdot\sin y =$$

$$= \cos(x-90^{\circ})\cdot\cos y - \sin(x-90^{\circ})\cdot\sin y = \cos(90^{\circ}-x)\cdot\cos y + \sin(90^{\circ}-x)\cdot\sin y =$$

$$= \sin x\cdot\cos y + \cos x\cdot\sin y.$$

Если оба угла тупые, то применяя последнее преобразование для каждого угла доказываем справедливость формул.

<u>Предлагаю ещё одно доказательство</u>.

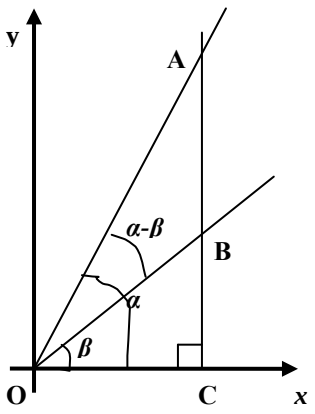

Рис. 2

Пусть $OC = 1$. Тогда $C(1;0)$, $B(1;\mathrm{tg}\beta)$; $A(1;\mathrm{tg}\alpha)$.

Имеем: $\overrightarrow{OA}\{1;\mathrm{tg}\alpha\}$; $\overrightarrow{OB}\{1;\mathrm{tg}\beta\}$

Рассмотрим скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$. По определению скалярного произведения двух векторов имеем:

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|\cdot\cos(\alpha-\beta) =$$

$$= \frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\beta}\cdot\cos(\alpha-\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}.$$

По свойству скалярного произведения двух векторов имеем: $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON} = 1+\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta$.

Т.е. $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} = 1+\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta$. $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} = 1+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}$.

$\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} = \dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$. Т.е. $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$.

<u>Предлагаю ещё одно доказательство.</u>

Имеем: $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOC} - S_{\triangle BOC}$. (Рис. 2) $\dfrac{1}{2}\cdot OA\cdot OB\cdot\sin(\alpha-\beta) = \dfrac{1}{2}\cdot OC\cdot AC - \dfrac{1}{2}\cdot OC\cdot BC$.

$OA\cdot OB\cdot\sin(\alpha-\beta) = 1\cdot AC - 1\cdot BC$. $\dfrac{1}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{1}{\cos\beta}\cdot\sin(\alpha-\beta) = \mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta$.

$\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}$. $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} = \dfrac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$.

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$.

Мамедов М.Д. - учитель математики гимназии №67 Санкт-Петербург.